Zusammenfassung DC

Paul Lödige
Matrikel: 15405036

SoSe 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Substitionsverfahren **2**
- 1.1 Skytale . . . 2
- 1.2 Monoalphabetische Substitionsverfahren . . . 2
  - 1.2.1 Caesar-Verschlüsselung . . . 3
  - 1.2.2 Häufigkeitsanalyse . . . 3
- 1.3 Polyalphabetische Substitutionsverfahren . . . 3
  - 1.3.1 Vignère-Verfahren . . . 3
  - 1.3.2 One-Time-Pad . . . 4
- 1.4 algebraische Substitionsverfahren . . . 4
  - 1.4.1 Hill-Verfahren . . . 4

2 Modulare Arithmetik **5**
- 2.1 Exkurs: Division mit Rest . . . 5
- 2.2 Der Ring $\mathbb{Z}_n$ . . . 5
  - 2.2.1 Addition und Multiplikation . . . 5
  - 2.2.2 Subtraktion . . . 6
  - 2.2.3 Teiler, Vielfache . . . 6
  - 2.2.4 Kongruenz . . . 6
  - 2.2.5 Matrizen . . . 6
- 2.3 Der erweiterte Euklid'sche Algorithmus . . . 6
  - 2.3.1 Euklid'scher Algorithmus . . . 7
  - 2.3.2 erweiterter Euklid'scher Algorithmus . . . 7
- 2.4 Euler'sche φ-Funktion . . . 8
  - 2.4.1 φ-Funktion und Primzahlen . . . 8

Kapitel 1

Substitionsverfahren

1.1 Skytale

Ein Streifen wird um einen Stock gewickelt und dann beschrieben. Nach dem abwickeln erhält man den entsprechenden Code. Durch aufwickeln auf einen Stock mit dem gleichen Umfang lässt sich die Nachricht wieder entschlüsseln.

Tipp:
Zum entschlüsseln der Nachricht am PC ist der Editor mit automatischen Zeilen-Wrap gut geeignet

1.2 Monoalphabetische Substitionsverfahren

Jeder Buchstabe wird bijektiv durch einen anderen Buchstaben des gleichen Alphabets ersetzt.

Alphabet:	$\mathscr{L} := \{A, B, ..., Z\}$
Schlüsselraum:	$\mathscr{K} := \{k : \mathscr{L} \to \mathscr{L} \mid k \text{ ist bijektiv}\}$
Verschlüsselung von $z \in \mathscr{L}$:	$k(z)$
Entschlüsselung:	$E(z) := k(z)$

1.2.1 Caesar-Verschlüsselung

Alle Buchstaben des Alphabets werden um einen konstanten Wert verschoben.
Beispiel:
Code: $n = 2$
Verschlüsselung: jeder Buchstabe wird durch den übernächsten Buchstaben im Alphabet ersetzt $(E(m) = (m + 3) \mod 26)$.
Entschlüsselung: jeder Buchstabe wird durch den vor-vorherigen Buchstaben ersetzt.

1.2.2 Häufigkeitsanalyse

Monoalphabetische Substitionsverfahren lassen sich mit moderner Technik sehr einfach durch die Verwendung von Häufigkeitsanalysen entschlüsseln. In jeder Sprache gibt es Buchstaben die deutlich häufiger vorkommen als andere. Durch einer Analyse der Häufigkeit der einzelnen Buchstaben im Geheimtext lassen sich diese den Ausgangsbuchstaben zuordnen.

1.3 Polyalphabetische Substitutionsverfahren

Damit sich ein Geheimtext nicht durch eine Häufigkeitsanalyse (1.2.2) entschlüsseln lässt wird bei polyalphabetischen Verschlüsselungsverfahren der Schlüssel regelmäßig gewechselt. Hierbei wird der Schlüsselwechsel meist selbst durch ein Schlüsselwort kodiert.

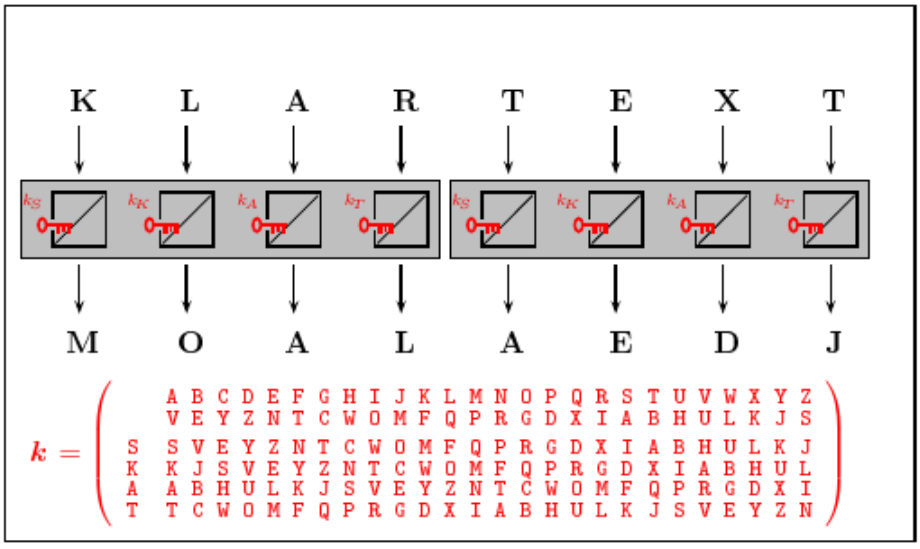
1.3.1 Vignère-Verfahren

Alphabet:	$\mathscr{L} := \{A, B, ..., Z\}$
Menge aller Wörter:	$\mathscr{W} = \mathscr{L}^{>0} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{L}^n = \{(m_1, m_2, ..., m_n) \vert m_i \in \mathscr{L}, n \in \mathbb{N}\}$
Schlüsselraum:	$\mathscr{K} := \Sigma_{\mathscr{L}} \times \mathscr{W}$

Ein Schlüssel $k = (f, w) \in \mathscr{K}$ besteht aus einer Permutation $f \in \Sigma_{\mathscr{L}}$ (siehe 1.2) und einem Schlüsselwort w.
Das Vignère-Verfahren ist ein Blockverschlüsselungsverfahren, bei dem jeweils ein Block von Zeichen (im Beispiel 4) nach dem gleichen Verfahren verschlüsselt wird. Wenn die Blockgröße klein genug oder die Textlänge groß genug sind lässt sich ein solches Verfahren ebenfalls durch eine Häufigkeitsanalyse (siehe 1.2.2) knacken.

1.3.1.1 Verschlüsselung

Der Schlüssel f wird zyklisch mithilfe des Schlüsselwortes w verschoben.
Beispiel:
f = VEYZNTCWOMFQPRGDXIABHULKJS und w = SKAT



1.3.2 One-Time-Pad

Bei dem One-Time-Pad handelt es sich um ein absolut sicheres Substitionsverfahren (Nachrichten, bei denen sich Informationen von der Länge der Nachricht ableiten lassen müssen auf eine konstante Länge gebracht werden).

1.3.2.1 Verschlüsselung

Annahme:	Klar- und Geheimtext sind eine Folge von Zeichen der Menge $\mathscr{L} = \mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{N})$
Klartextnachricht:	$m = (m_1, m_2, ...m_l) \in {\mathbb{Z}_n}^l$
One-Time-Pad (zufällig):	$k = (k_1, k_2, ...k_l) \in {\mathbb{Z}_n}^l$
Geheimtext:	$E(m) := m + k := (m_1 + k_1, m_2 + k_2, ..., m_l + k_l)$

1.3.2.2 Perfekte Sicherheit

Wenn die Zeichen k_i des Schlüssels mit einem perfekten Zufallsgenerator erzeugt lassen sich **keine** Rückschlüsse auf die Klartextnachricht ziehen (außer Länge).
Allerdings darf ein One-Time-Pad nur ein einziges Mal für die Verschlüsselung verwendet werden. Andernfalls könnte durch eine Berechnung der Differenz der mit dem gleichen OTP verschlüsselten Nachrichten Informationen gewonnen werden. So kann eine Häufigkeitsanalyse (siehe 1.2.2) oder sogar eine komplette Entschlüsselung (falls Klartext einer Nachricht bekannt ist) möglich werden.

1.4 algebraische Substitionsverfahren

1.4.1 Hill-Verfahren

Das Hill-Verfahren ver- und entschlüsselt die Nachrichten mithilfe einer **invertierbaren** Matrix.

1.4.1.1 Verschlüsselung

Annahme:	$n, k \in \mathbb{N}$ sind vorgegeben
Klartextnachricht:	Menge von Blöcken $\mathscr{B} = {\mathbb{Z}_n}^k$
Schlüssel:	**invertierbare** (k, k)-Matrix K
Geheimtext:	$E_K(b) := K \cdot b \qquad (b \in \mathscr{B})$

1.4.1.2 Entschlüsselung

Annahme:	gleiche Bedingungen wie bei der Verschlüsselung
Geheimtextnachricht:	Menge von Blöcken $\mathscr{C} = {\mathbb{Z}_n}^k$
Klartext:	$E_K(c) := K^{-1} \cdot c \qquad (c \in \mathscr{C})$

Kapitel 2

Modulare Arithmetik

2.1 Exkurs: Division mit Rest

Für $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte Element $q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < |b|$:

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q + r \\ a/_{\mathbb{Z}} b &:= q \\ a \mod b &:= r \end{aligned}$$

2.2 Der Ring $\mathbb{Z}_n$

Ein Ring $\mathbb{Z}_n$ ist definiert durch:

$$\mathbb{Z}_n := 0, 1, ..., n-1$$

2.2.1 Addition und Multiplikation

$$\begin{aligned} a +_{\mathbb{Z}_n} b &:= (a + b) \mod n \\ a \cdot_{\mathbb{Z}_n} b &:= (a \cdot b) \mod n \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.2.1.1 Inverse bezüglich der Addition

jedes $a \in \mathbb{Z}$ hat ein Inverses:

$$-a := \begin{cases} 0 & \text{für } a = 0 \\ n - a & \text{sonst} \end{cases}$$

2.2.1.2 Inverse bezüglich der Multiplikation

ein Element $a \in \mathbb{Z}_n$ ist *(multiplikativ) invertierbar*, falls es ein Element $b \in \mathbb{Z}_n$ gibt, für das gilt:

$$a \cdot b = 1$$

man schreibt auch:

$$a^{-1} := b$$

Die Menge der invertierbaren Elemente in $\mathbb{Z}_n$ wird als $\mathbb{Z}_n^*$ bezeichnet:

$$\mathbb{Z}_n^* = \{a \in \mathbb{Z}_n \mid a \cdot b = 1 \text{ für ein } b \in \mathbb{Z}n\}$$

Zudem gilt, dass ein Element nur dann invertierbar ist, falls $ggT(a, n) = 1$:

$$\mathbb{Z}_n^* = \{a \in \mathbb{Z}_n \mid ggT(a, n) = 1\}$$

2.2.2 Subtraktion

Eine Subtraktion entspricht einer Addition mit der Inverse:

$$a -_{\mathbb{Z}_n} b := a +_{\mathbb{Z}_n} (-b) \mod n$$

2.2.3 Teiler, Vielfache

$b \in \mathbb{Z}$ teilt $a \in \mathbb{Z}$ falls ein $q \in \mathbb{Z}$ existiert mit:

$$a = b \cdot q$$

man schreibt auch $b|a$

2.2.3.1 Teilerregeln

1. $a|0 \ \forall a \in \mathbb{Z}$
2. $a|b \Leftrightarrow a|(-b)$
3. $a|b$ und $a|c \Rightarrow a|(b+c)$

2.2.4 Kongruenz

$a, b \in \mathbb{Z}$ sind *kongruent modulo* n, falls $n \in \mathbb{N}|(a-b)$. Man schreibt auch $a \equiv b$

2.2.5 Matrizen

2.2.5.1 Determinantenberechnung

Die Determinante $\det(A)$ der (N,N)-Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ (mit ganzzahligen Einträgen) über $\mathbb{Z}_n$ wird definiert durch:

$$\det(A) \mod n = det((a_{i,j} \mod n)_{1 \leq i,j \leq N})$$

Zudem gilt für die Matrizen $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ und $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ (mit ganzzahligen Einträgen):

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) \mod n &= (det(A) \cdot \det(B)) \mod n \\ &= ((\det(A) \mod n) \cdot (\det(B) \mod n)) \mod n \\ &= (\det(A) \mod n) \cdot_{\mathbb{Z}_n} (\det(B) \mod n) \end{aligned}$$

2.2.5.2 Inverse Matrix

Die Inverse einer quadratischen Matrix A über $\mathbb{Z}_n$ lässt sich mithilfe der Adjunkten berechnen:

$$A^{-1} = (\det(A))^{-1} \cdot adj(A)$$

Die Adjunkte lässt sich über $\mathbb{Z}_n$ berechnen, da lediglich Summen und Differenzen von Produkten berechnet werden müssen.

2.3 Der erweiterte Euklid'sche Algorithmus

Der Euklid'sche Algorithmus ist ein sehr effizienter Weg den ggT zweier Zahlen zu ermitteln. Der Euklid'sche Algorithmus lässt sich auch über $\mathbb{Z}_n$ verwenden. Man spricht dann von dem erweiterten Euklid'schen Algorithmus.

2.3.1 Euklid'scher Algorithmus

gegeben: $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$

1. $a := a_0$ und $b := b_0$
2. falls $b = 0$ gebe $|a|$ aus und beende
3. $r := a \mod b$
4. $a := b$
5. $b := r$
6. goto 2.

2.3.2 erweiterter Euklid'scher Algorithmus

gegeben: $a_0, b_0 \in \mathbb{N}_0$
gesucht: $\alpha \cdot a_0 + \beta \cdot b_0 = g = ggT(a_0, b_0)$

1. $a := a_0$, $\alpha_a = 1$, $\beta_b = 0$, $b := b_0$, $\alpha_b := 0$, $\beta_b := 1$
2. falls $b = 0$ gebe $g := a$, $\alpha := \alpha_a$ und $\beta := \beta_a$ aus
3. $q := a/_{\mathbb{Z}} b$
4. $r := a - q \cdot b$,$\alpha_r := \alpha_a - q \cdot \alpha_b$, $\beta_r := \beta_a - q \cdot \beta_b$
5. $a := b$, $\alpha_a := \alpha_b$, $\beta_a := \beta_b$
6. $b := r$, $\alpha_b := \alpha_r$ $\beta_b := \beta_r$
7. goto 2.

2.3.2.1 Beispiel

Eingabe:

$$a_0 = 1224 \text{ und } b_0 = 156$$

Berechnung:

1224	156	a,b	q
1	0	1224	
0	1	156	7
1	-7	132	1
-1	8	24	5
6	-47	12	2
		0	

Ergebnis:

$$6 \cdot 1224 + (-47) \cdot 156 = 12$$

2.4 Euler'sche φ-Funktion

Die Euler'sche φ-Funktion bezeichnet die Anzahl invertierbarer Elemente in $\mathbb{Z}_n$

$$\varphi(n) := \begin{cases} |\mathbb{Z}_n^*| & \text{für } n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \\ 1 & \text{für } n = 1 \end{cases}$$

Für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $ggT(a, b) = 1$ gilt:

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

Zudem gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ dessen Primzahlzerlegung $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$:

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{r} (1 - \frac{a}{p_i})$$

2.4.1 φ-Funktion und Primzahlen

für eine Primzahl p gilt:

$$\varphi(p) = p - 1$$

Für Primzahlpotenzen gilt zudem:

$$\varphi(p^e) = p^{e-1}(p - 1)$$